AYUNAN MATEMATIS

A. Tujuan

1. Mampu memahami asas ayunan matematis dengan getaran selaras
2. Mampu memahami percepatan gravitasi
3. Mampu menentukan besar percepatan gravitasi ditempat percobaan

B. Alat dan Bahan

1. Ayunan sederhana
2. Stopwatch
3. Counter
4. Mistar

C. Dasar Teori

Bandul matematis adalah suatu titik benda digantungkan pada suatu titk tetap dengan tali. Jika ayunan menyimpang sebesar sudut θ terhadap garis vertical maka gaya yang mengembalikan :

$$F = - m \cdot g \cdot \sin\theta$$

Untuk θ dalam radial yaitu θ kecil maka sin θ = θ = s/l, dimana s = busur lintasan bola dan l = panjang tali , sehingga :

$$F = -\frac{mgs}{l}$$

Kalau tidak ada gaya gesekan dan gaya puntiran maka persamaan gaya adalah :

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{mg}{l}s \quad \text{atau} \quad m\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l}g = 0$$

Ini adalah persamaan differensial getaran selaras dengan periode adalah :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{x}}$$

Dengan bandul matematis maka percepatan gravitasi g dapat ditentukan yaitu dengan hubungan :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{x}}$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Harga l dan T dapat diukur pada pelaksanaan percobaan dengan bola logam yang cukup berat digantungkan dengan kawat yang sangat ringan (Anonim, 2007).

Beban yang diikat pada ujung tali ringan yang massanya dapat diabaikan disebut bandul. Jika beban ditarik kesatu sisi, kemudian dilepaskanmaka beban akan terayun melalui titik keseimbangan menuju ke sisi yang lain. Bila amplitudo ayunan kecil, maka bandul sederhana itu akan melakukan getaran harmonik. Bandul dengan massa m digantung pada seutas tali yang panjangnya l. Ayunan mempunyai simpangan anguler θ dari kedudukan seimbang. Gaya pemulih adalah komponen gaya tegak lurus tali.

$$F = - m\, g \sin \theta$$

$$F = m\, a$$

maka

$$m\, a = - m\, g \sin \theta$$

$$a = - g \sin \theta$$

Untuk getaran selaras θ kecil sekali sehingga sin θ = θ. Simpangan busur $s = l\theta$ atau $\theta = s/l$, maka persamaan menjadi: $a = -gs/l$. Dengan persamaan periode getaran harmonik

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{-s}{a}}$$

maka didapat menjadi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{-s}{-gs/l}} \quad \text{atau} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dimana :

l = panjang tali (meter)

g= percepatan gravitasi (ms^{-2})

T= periode bandul sederhana (s)

Dari rumus di atas diketahui bahwa periode bandul sederhana tidak bergantung pada massa dan simpangan bandul, melaikan hanya bergantung pada panjang dan percepatan gravitasi, yaitu:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

(Hendra, 2006).

Gerak osilasi yang sering dijumpai adalah gerak ayunan. Jika simpangan osilasi tidak terlalu besar, maka gerak yang terjadi dalam gerak harmonik sederhana. Ayunan sederhana adalah suatu sistem yang terdiri dari sebuah massa dan tak dapat mulur. Ini dijunjukkan pada gambar dibawah ini. Jika ayunan ditarik kesamping dari posisi setimbang, dan kemudian dilepasskan, maka massa m akan berayun dalam bidang vertikal kebawah pengaruh gravitasi. Gerak ini adalah gerak osilasi dan periodik. Kita ingin menentukan periode ayunan. Pada gambar di bawah ini, ditunjukkan sebuah ayunan dengan panjang 1, dengan sebuah partikel bermassa m, yang membuat sudut θ terhadap arah vertical. Gaya yang bekerja pada partikel adalah gaya berat $\overrightarrow{mg}$ dan gaya tarik $\underset{T}{\rightarrow}$ dalam tali. Kita pilih suatu sistem koordinat dengan satu sumbu menyinggung lingkaran gerak (tangensial) dan sumbu lain pada arah radial. Kemudian kita uraikan gaya berat mg atas komponen-komponen pada arah radial, yaitu *mg cos θ,* dan arah tangensial, yaitu *mg sin θ.*

Komponen radial dari gaya-gaya yang bekerja memberikan percepatan sentripetal yang diperlukan agar benda bergerak pada busur lingkaran.Komponen tangensial adalah gaya pembalik pada benda m yang cenderung mengembalikan massa keposisi setimbang. Jadi gaya pembalik adalah :

$$F = -mg\sin\theta$$

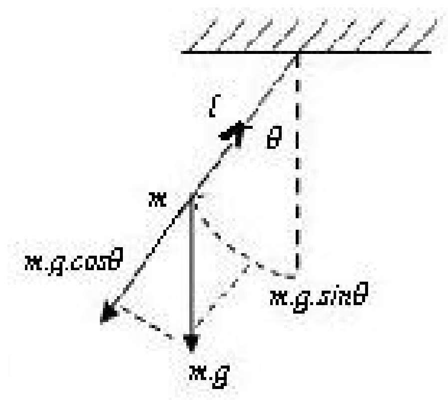
Perhatikan bahwa gaya pembalik di sini tidak sebanding dengan θ akan tetapi sebanding dengan sin θ. Akibatnya gerak yang dihasilkan bukanlah gerak harmonic sederhana. Akan tetapi, jika sudut θ adalah kecil maka sin θ ≈ θ (radial). Simpangan sepanjang busur lintasan adalah

$x = l\theta$,

dan untuk sudut yang kecil busur lintasan dapat dianggap sebagai garis lurus. Jadi kita peroleh

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta = -mg\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$F = -\frac{mg}{l}x$$



Gambar. 1. *Gaya-gaya yang bekerja pada ayunan sederhana adalah gaya tarik T dan gaya berat mg pada massa m*

Jadi untuk *simpangan yang kecil,* gaya pembalik adalah sebanding dengan simpangan, dan mempunyai arah berlawanan. Ini bukan laian adalah persyaratan gerak harmonic sederhana. Tetapan *mg/l* menggantikan tetapan k pada F=-kx.

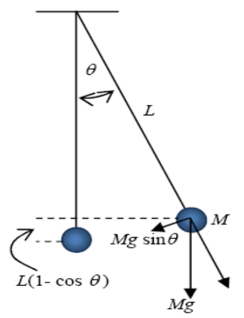
Perioda ayunan jika amplitude kecil adalah:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(Sutrisno, 1997).

Contoh dari kategori ayunan mekanis, yaitu pendulum. Kita akan memulai kajian kita dengan meninjau persamaan gerak untuk sistem yang dikaji seperti dalam gambar 2.



Gambar 2.*Pendulum, gaya pemulih yang timbul berkaitan dengan pengaruh gravitasi pada massa M. Dapat anda menyebutkan kondisi apa saja yang berlaku untuk pendulum sederhana seperti di samping*

Gaya pemulih muncul sebagai konsekuensi gravitasi terhadap bola bermassa M dalam bentuk gaya gravitasi M_g yang saling meniadakan dengan gaya *Mdv/dt* yang berkaitan dengan kelembaman. Adapun frekuensi ayunan tidak bergantung kepada massa M.

Dalam kasus sistem ayunan seperti yang disajikan dalam gambar di atas, maka gerakan massa M terbatasi atau ditentukan oleh panjang pendulum L, dan persamaan gerak yang berlaku adalah :

$$ML\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

dimana dalam hal ini kecepatan bola sepanjang lintasannya yang berupa busur lingkaran adalah $v(t) = L\theta(t)$. Faktor sinθ merupakan komponen yang searah dengan gravitasi dari gaya yang bekerja pada bola dalam arah θ. Selanjutnya dengan membuang M dari kedua sisi persamaan di atas, diperoleh bentuk $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$, yang merupakan persamaan diferensial tak linear untuk θ.

Jika dianggap simpangan awal ayunan cukup kecil $|\theta| \ll 1\ (rad)$, maka berlaku sin θ=θ sehingga persamaan dapat diubah menjadi bentuk linear sebagai berikut,

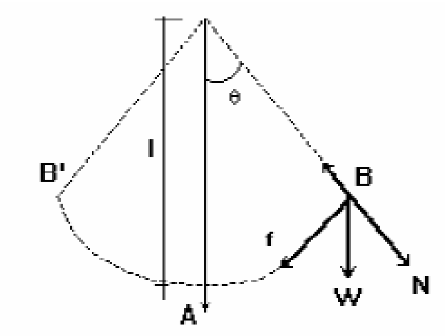
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

persamaan merupakan gambaran untuk ayunan sinusuidal dengan frekuensi diberikan oleh:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ maka } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(yahya, 2005).

Pada bandul matematis, berat tali diabaikan dan panjang tali jauh lebih besar dari pada ukuran geometris dari bandul. Pada posisi setimbang, bandul berada pada titik A. Sedangkan pada titik B adalah kedudukan pada sudut di simpangan maksimum (θ). Kalau titik B adalah kedudukan dari simpangan maksimum, maka gerakan bandul dari B ke A lalu ke B' dan kemudian kembali ke A dan lalu ke B lagi dinamakan satu ayunan. Waktu yang diperlukan untuk melakukan satu ayunan ini disebut periode (T). Seperti pada gambar 3. di bawah ini



f=	komponen w menurut garis singgung pada lintasan bandul
P=	gaya tegang tali
N=	komponen normal dari W=mg
l=	panjang tali
θ =	sudut simpangan

Gambar 3. *bandul matematis, berat tali diabaikan dan panjang tali dan panjang tali yang memiliki ukuran lebih besar.*

Dengan mengambil sudut θ cukup kecil sehingga BB'= busur BAB', maka dapat dibuktikan bahwa

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dengan mengetahui panjang tali dan periode, maka percepatan gravitasi bumi dapat dihitung (Anonim, 2004).

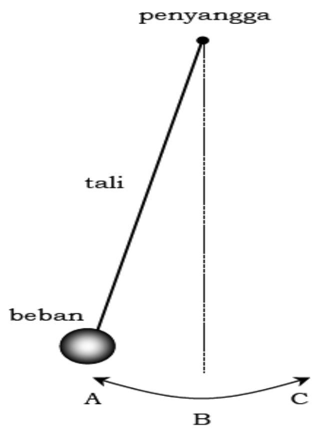
Cara sederhana mengukur g adalah dengan menggunakan bandul matematis sederhana. Bandul ini terdiri dari beban yang diikatkan pada ujung benang (tali ringan) dan ujung lainnya dogantungkan pada penyangga tetap. Beban dapat berayun dengan bebas. Ketika disimpangkan, bandul bergerak bolak-balik. Waktu satu kali gerak bolak-balik disebut satu periode. Kita nyatakan periode dengan symbol T. Periode bandul memenuhi rumus :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 L}{g}$$

T= periode bandul (s)

L= panjang penggantung (m)

g= percepatan gravitasi (m/s^2)



Gambar 4. *bandul yang diikat pada tali*

(Anonim, 2003).

Fitting menurut kuadrat terkecil

1. Fitting menurut garis linear (y = ax + b).

Diketahui set data (xi, yi). Akan ditentukan persamaan garis lurus yang terbaik yang melalui set data tersebut.

$$E = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \hat{y}\right) \tag{1}$$

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \hat{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]^2}$$

$$= \left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]^2\right\}^{1/2} \tag{2}$$

$$NE_{rms}^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]^2 = \varepsilon \tag{3}$$

E_{rms} akan minimum jika NE_{rms}^2 minimum. Misal $NE_{rms}^2 = \varepsilon$. Nilai ε akan minimum jika $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 0; \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = 0$. Jika ini dikerjakan maka akan diperoleh nilai a dan b.

a. Menghitung $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = 0$

$$2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right](-x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[-x_i y_i+\left(ax_i^2+bx_i\right)\right]=0$$

$$-\sum_{i=1}^{N}x_i y_i+\sum_{i=1}^{N}ax_i^2+\sum_{i=1}^{N}bx_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}ax_i^2+\sum_{i=1}^{N}bx_i=\sum_{i=1}^{N}x_i y_i \tag{4}$$

b. Menghitung $\frac{\partial \varepsilon}{\partial b}=0$

$$2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-\left(ax_i+b\right)\right](1)=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-\left(ax_i+b\right)\right]=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}ax_i-\sum_{i=1}^{N}b=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}ax_i-Nb=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}ax_i+Nb=\sum_{i=1}^{N}y_i \tag{5}$$

Persamaan (6.4) da (6.5) digabung

$$a\sum_{i=1}^{N}x_i^2+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{N}x_i+Nb=\sum_{i=1}^{N}y_i$$

Jadi terdapat dua persamaan dengan 2 variabel yang belum diketahui yaitu a dan b. Kedua pers. Tersebut dapat dibentuk dalam matrik:

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 & \sum_{i=1}^{N}x_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_i & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{N}x_i y_i\\ \sum_{i=1}^{N}y_i\end{pmatrix} \tag{6}$$

Maka

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{vmatrix}} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{7}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{8}$$

Maka diperoleh persamaan kurva fitting y = ax + b.

2. Garis lurus $y = a + bx$

$y(x_i) = a + bx_i$

$\Delta y_i = y_i - y(x_i)$

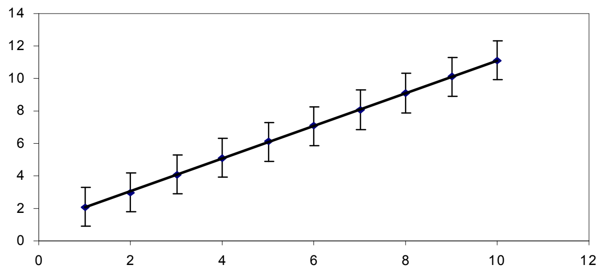
a dan b dicari agar P_{total} bernilai maksimum.

Misal didefinisikan χ^2 (chi kuadrat dibaca “kai kuadrat”) sebagai

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - y(x_i)}{s_{y_i}} \right)^2$$

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - (a + bx_i)}{s_{y_i}} \right)^2$$

a. Jika $|s_{y_1}| = |s_{y_2}| = |s_{y_3}| = |s_{y_i}| = |s_y|$



Hal ini terjadi jika pada masing-masing titik tidak dilakukan pengulangan sehingga ralatnya merupakan ralat yang berasal dari alat ukur yang besarnya selalu tetap.

$$\chi^2 = \frac{1}{s_y^2}\sum\left(y_i - (a + bx_i)\right)^2 = \frac{1}{s_y^2}\sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \tag{9}$$

Syarat χ^2 minimum adalah $\frac{\partial\chi^2}{\partial a} = \frac{\partial\chi^2}{\partial b} = 0$

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a} = \frac{1}{s_y^2}\sum 2\left(y_i - (a + bx_i)\right)(-1) = 0$$

$$\Sigma a + \Sigma bx_i = \Sigma y_i$$

$$Na + \Sigma bx_i = \Sigma y_i \tag{10}$$

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial b} = \frac{1}{s_y^2}\sum 2\left(y_i - (a + bx_i)\right)(-x_i) = 0$$

$$a\Sigma x_i + \Sigma bx_i^2 = \Sigma x_i y_i \tag{11}$$

Dari pers. (10) dan (11) maka diperoleh:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma y_i & \Sigma x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ N & \Sigma x_i \end{vmatrix}} = \frac{(\Sigma x_i)(\Sigma x_i y_i) - \left(\Sigma x_i^2\right)(\Sigma y_i)}{(\Sigma x_i)^2 - N\Sigma x_i^2} \tag{12}$$

Misal bagian penyebut pada pers. (12):

$$\Delta = (\Sigma x_i)^2 - N\Sigma x_i^2$$

Maka :

$$a = \frac{1}{\Delta}\left[(\Sigma x_i)(\Sigma x_i y_i) - \left(\Sigma x_i^2\right)(\Sigma y_i)\right] \tag{13}$$

Dengan cara yang sama yaitu dengan menerapkan $\frac{\partial\chi^2}{\partial b} = 0$ maka diperoleh:

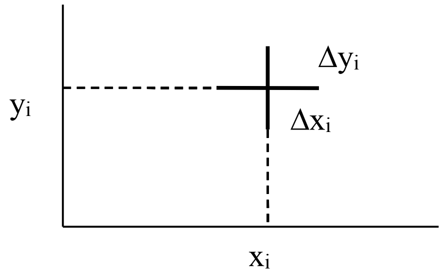
$$b = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i & \Sigma x_i y_i \\ N & \Sigma y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ N & \Sigma x_i \end{vmatrix}} = \frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) - N\sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N\sum x_i^2}$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left[(\Sigma x_i)(\Sigma y_i) - N\Sigma x_i y_i\right] \tag{14}$$

Tampak bahwa nilai a dan b tidak ada ketergantungan terhadap s_y.

b. Jika x_i dan y_i keduanya memiliki ralat yang besarnya $|s_{x_i}| = |s_{y_i}|$ maka s total untuk x_i dan y_i adalah :

$$s_i = \sqrt{s_{x_i}^2 + s_{y_i}^2} \tag{15}$$



Lanjutan ...

$$a = a(y_i) = a(y_1, y_2, ..., y_N)$$

$$s_a{}^2 = \Sigma\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 s_{y_i}^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial y_1}\right)^2 s_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y_2}\right)^2 s_{y_2}^2 + ... + \left(\frac{\partial a}{\partial y_N}\right)^2 s_{y_N}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a}{\partial y_j}\right)^2 s_{y_j}^2 \tag{16}$$

dimana $\dfrac{\partial a}{\partial y_j} = \dfrac{1}{\Delta}\left[\left(\sum_i x_i x_j\right) - \left(\sum_i x_i^2\right)\right]$

ingat, karena $s_{y_j} = s_y$ maka pada pers. (7) ungkapan tersebut dimasukkan sehingga:

$$s_a{}^2 = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_i x_i x_j - \sum_i x_i^2\right)^2 s_y{}^2$$

$$= \frac{s_y{}^2}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\sum_i x_i x_j\right)^2 + \left(\sum_i x_i^2\right)^2 - 2\left(\sum_i x_i\right)(x_j)\left(\sum_i x_i^2\right)\right]$$

$$= \frac{s_y{}^2}{\Delta^2}\left[\left(\sum_i x_i\right)^2\left(\sum_j x_j^2\right) + N\left(\sum_i x_i^2\right)^2 - 2\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_j x_j\right)\right]$$

$$= \frac{s_y^{\;2}}{\Delta^2}\left[\left(\sum_i x_i\right)^2\left(\sum_i x_i^{\;2}\right) + N\left(\sum_i x_i^{\;2}\right)^2 - 2\left(\sum_i x_i\right)^2\left(\sum_i x_i^{\;2}\right)\right]$$

$$s_a^{\;2} = \frac{s_y^{\;2}}{\Delta^2}\Sigma x_i^2 \underbrace{\left[N\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2\right]}_{\Delta}$$

$$s_a^{\;2} = \frac{s_y^{\;2}}{\Delta}\Sigma x_i^2 \quad \text{atau} \quad s_a = s_y\sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{N\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}} \tag{17}$$

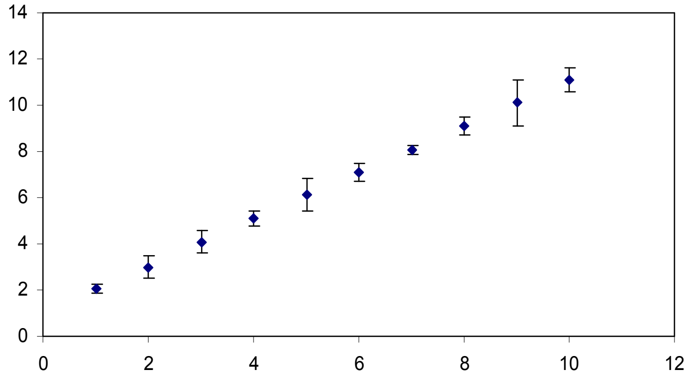
Dengan cara yang sama maka diperoleh:

$$s_b^{\;2} = \frac{N s_y^{\;2}}{\Delta} \quad \text{atau} \quad s_b = s_y\sqrt{\frac{N}{N\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}}$$

c. Jika

$$\left|s_{y_1}\right| \neq \left|s_{y_2}\right| \neq \left|s_{y_3}\right| \neq \left|s_{y_i}\right| \qquad \left|s_{y_i}\right| = \text{konstan}$$

Hal ini dapat terjadi jika pada masing-masing titik dilakukan pengukuran berulang sehingga memiliki simpangan baku.



$$\chi^2 = \sum\left(\frac{y_i - (a + bx_i)}{s_{y_i}}\right)^2 = \sum\frac{1}{s_{y_i}^{\;2}}\left[y_i - (a + bx_i)\right]^2$$

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a} = 2\sum\left[\frac{y_i - (a + bx_i)}{s_{y_i}^{\;2}}\right](-1) = 0 \tag{18}$$

$$a\Sigma\frac{1}{s_{y_i}^2}+b\Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}=\Sigma\frac{y_i}{s_{y_i}^2} \tag{19}$$

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial b}=2\sum\left[\frac{y_i-(a+bx_i)}{s_{y_i}^2}\right](-x_i)=0 \tag{20}$$

$$a\Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}+b\Sigma\frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}=\Sigma\frac{x_iy_i}{s_{y_i}^2} \tag{21}$$

Dari pers. (19) dan (21) maka diperoleh:

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma\frac{y_i}{s_{y_i}^2} & \Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}\\ \Sigma\frac{x_iy_i}{s_{y_i}^2} & \Sigma\frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Sigma\frac{1}{s_{y_i}^2} & \Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}\\ \Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2} & \Sigma\frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\end{vmatrix}}=\frac{\Sigma\frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\Sigma\frac{y_i}{s_{y_i}^2}-\Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}\Sigma\frac{x_iy_i}{s_{y_i}^2}}{\Sigma\frac{1}{s_{y_i}^2}\Sigma\frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}-\left(\Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2} \tag{22}$$

Dengan memisalkan

$$\Delta=\Sigma\frac{1}{s_{y_i}^2}\Sigma\frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}-\left(\Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2 \tag{23}$$

$$\Delta=\Sigma w_i\Sigma w_ix_i^2-\left(\Sigma w_ix_i\right)^2$$

Maka intersep

$$\boxed{a=\frac{1}{\Delta}\left[\Sigma\frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\Sigma\frac{y_i}{s_{y_i}^2}-\Sigma\frac{x_i}{s_{y_i}^2}\Sigma\frac{x_iy_i}{s_{y_i}^2}\right]} \tag{24}$$

$$\boxed{a=\frac{1}{\Delta}\left[\Sigma w_ix_i^2\Sigma w_iy_i-\Sigma w_ix_i\Sigma w_ix_iy_i\right]}$$

$$s_a^2=\sum_j\left(\frac{\partial a}{\partial y_j}\right)^2 s_{y_j}^2=\sum_j\left(\frac{\partial a}{\partial y_j}s_{y_j}\right)^2 \tag{25}$$

atau untuk untuk memudahkan pemahaman:

$$s_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial y_1} s_{y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y_2} s_{y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y_3} s_{y_3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial a}{\partial y_N} s_{y_N}\right)^2}$$

Pada pers. (16) turunan a terhadap y_j dimana y_j adalah salah satu nilai dari y_i adalah:

$$\frac{\partial a}{\partial y_j} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)\left(\frac{1}{s_{y_j}^2}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)\left(\frac{x_j}{s_{y_j}^2}\right)\right] \tag{26}$$

Dengan mensubstitusikan pers. (26) ke (25) dan kemudian memasukkan $s_{y_j}^2$ ke dalam kurung maka diperoleh:

$$s_a^2 = \frac{1}{\Delta^2}\sum_j \left[\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)\left(\frac{1}{s_{y_j}}\right) - \left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)\left(\frac{x_j}{s_{y_j}}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\sum_j \left[\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)^2\left(\frac{1}{s_{y_j}}\right)^2 + \left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2\left(\frac{x_j}{s_{y_j}}\right)^2 - 2\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)\left(\frac{1}{s_{y_j}}\right)\left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)\left(\frac{x_j}{s_{y_j}}\right)\right]$$

Jika tanda $\sum_j$ dimasukkan ke dalam kurung kotak maka

$$s_a^2 = \frac{1}{\Delta^2}\left[\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)^2 \sum_j \frac{1}{s_{y_j}^2} + \left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2 \sum_j \left(\frac{x_j}{s_{y_j}}\right)^2 - 2\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)\left(\sum_j \frac{x_j}{s_{y_j}^2}\right)\right]\delta_{ij} \tag{27}$$

sehingga dengan menjalankan $i = j = 1 \ldots N$ maka diperoleh:

$$s_a^2 = \frac{1}{\Delta^2}\left[\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)^2\left(\sum_i \frac{1}{s_{y_i}^2}\right) + \left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2\left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}}\right)^2 - 2\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2\right] \tag{28}$$

Dengan menguraikan Δ^2 menjadi $\Delta\Delta$ dan mengganti salah satu Δ dengan pers. (23) maka $\Delta\Delta$ ditulis menjadi:

$$\Delta\left(\Sigma \frac{1}{s_{y_i}^2}\Sigma \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2} - \left(\Sigma \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2\right) \tag{29}$$

maka persamaan (28) menjadi

$$s_a^2 = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\left[\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)^2\left(\sum_i \frac{1}{s_{y_i}^2}\right) + \left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2\left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}}\right)^2 - 2\left(\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}\right)\left(\sum_i \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2\right]}{\left(\Sigma \frac{1}{s_{y_i}^2}\Sigma \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2} - \left(\Sigma \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2\right)}\right] \tag{30}$$

yang nilainya dapat didekati dengan:

$$s_a^2 \cong \frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2} \text{ atau } s_a \cong \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2}} \text{ atau } s_a \cong \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum_i w_i x_i^2} \tag{31}$$

Slope grafik

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma \frac{1}{s_{y_i}^2} & \Sigma \frac{y_i}{s_{y_i}^2} \\ \Sigma \frac{x_i}{s_{y_i}^2} & \Sigma \frac{x_i y_i}{s_{y_i}^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma \frac{1}{s_{y_i}^2} & \Sigma \frac{x_i}{s_{y_i}^2} \\ \Sigma \frac{x_i}{s_{y_i}^2} & \Sigma \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2} \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma \frac{1}{s_{y_i}^2}\Sigma \frac{x_i y_i}{s_{y_i}^2} - \Sigma \frac{y_i}{s_{y_i}^2}\Sigma \frac{x_i}{s_{y_i}^2}}{\Sigma \frac{1}{s_{y_i}^2}\Sigma \frac{x_i^2}{s_{y_i}^2} - \left(\Sigma \frac{x_i}{s_{y_i}^2}\right)^2}$$

$$b = \frac{\Sigma w_i \Sigma w_i x_i y_i - \Sigma w_i y_i \Sigma w_i x_i}{\Delta}$$

Dengan cara yang sama untuk s_b maka diperoleh:

$$s_b^2 \cong \frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{1}{s_{y_i}^2} \text{ atau } s_b \cong \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{1}{s_{y_i}^2}} \text{ atau } s_b \cong \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum_i w_i} \tag{32}$$

dengan $\Delta = \Sigma w_i \Sigma w_i x_i^2 - (\Sigma w_i x_i)^2$

Untuk gejala yang mengikuti distribusi Poisson maka

$$s_{y_i} = \sqrt{y_i} \tag{32}$$

maka:

$y = N$ sehingga $s_y = \sqrt{N}$ (Bevington, 2003).

D. Cara Kerja

Prosedur Percobaan Ayunan Matematis

1. Menetapkan kedudukan kawat penjepit sehingga jarak sampai pusat bola 70 cm dan atur simpangan bola kemudian lepaskan ayunan.
2. Mencatat waktu yang diperlukan untuk 10 ayunan dengan menekan stopwatch pada saat melewati titik keseimbangan.
3. Mengulangi langkah nomer 2 dengan panjang tali 70 cm sebanyak 5 kali
4. Mengulangi langkah nomer 2 dengan panjang tali 59 cm, 50 cm, 45 cm, 40 cm, 35 cm
5. Mengulangi langkah nomer 2 dengan panjang tali 70 cm, 60 cm, 50 cm, 40 cm, 30 cm masing-masing sebanyak 5 kali
6. Menghitung berapa ***g*** pada tempat percobaan

E. Analisis Data

Tabel . 1.1

N	l (cm)	t (S)	n	T	T^2	T^3	g	ST	Sg
1	0.7	16.63	10	1.66	2.766	4.599	9.99	0.005	0.06

Periode getaran (T)

$$T = \frac{t}{n} = \frac{16,63}{10} = 1,66 \text{ s}$$

Periode getaran kuadrat (T^2)

$$T^2 = (1,663\ S)^2 = 2,766\ s^2$$

Periode getaran pangkat tiga (T^3)

$$T^3 = (1,663\ s)^3 = 4,599\ s^3$$

Percepatan gravitasi (g)

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2 (0,7)}{2,766} = 9,99$$

Nilai ralat (S_T) = 0,005 detik

Nilai ralat gravitasi (Sg)

$$S_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} S_T\right)^2}$$

$$S_g = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right) S_T\right)^2}$$

$$S_g = \sqrt{\left(\frac{-2x4\pi^2 l}{T^3} S_T\right)^2}$$

$$S_g = \frac{8\pi^2 l}{T^3} S_T = \frac{8\pi^2 (0{,}7)}{4{,}599} x0{,}005 = 0{,}06$$

Percepatan gravitasi (g)

$g = \overline{g} \pm S_{\overline{g}} = (9{,}99 \pm 0{,}06)\ \mathrm{m/s^2}$

Tabel. 1.2

N	l(m)	t(s)	n	T	T^2	g
5	0.7	17.12	10	1.71	2.931	9.429
		16.74	10	1.67	2.802	9.862
		16.77	10	1.68	2.812	9.826
		16.75	10	1.68	2.806	9.850
		16.73	10	1.67	2.799	9.873
rata-rata						9.768
						Sg
						0.190

Periode getaran (T)

$$T_1 = \frac{t_1}{n} = \frac{17{,}12}{10} = 1{,}71\ \mathrm{s}$$

$$T_2 = \frac{t_2}{n} = \frac{16{,}74}{10} = 1{,}67\ \mathrm{s}$$

$$T_3 = \frac{t_3}{n} = \frac{16{,}77}{10} = 1{,}68\ \mathrm{s}$$

$$T_4 = \frac{t_4}{n} = \frac{16{,}75}{10} = 1{,}68\ \mathrm{s}$$

$$T_5 = \frac{t_5}{n} = \frac{16,73}{10} = 1,67 \text{ s}$$

Percepatan gravitasi rata-rata $(\bar{g})$

$$\bar{g} = \frac{\sum_i g_i}{N} = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5}{N} = \frac{9,429 + 9,862 + 9,826 + 9,850 + 9,873}{5} = 9,768$$

Nilai ralat

$$S_g = \sqrt{\frac{\sum_i (\delta g_i)^2}{(N-1)}}$$

$$S_g = \sqrt{\frac{(g_1 - \bar{g})^2 + (g_2 - \bar{g})^2 + (g_3 - \bar{g})^2 + (g_4 - \bar{g})^2 + (g_5 - \bar{g})^2}{(N-1)}}$$

$$S_g = \sqrt{\frac{(9,429 - 9,768)^2 + (9,862 - 9,768)^2 + (9,826 - 9,768)^2 + (9,850 - 9,768)^2 + (9,873 - 9,768)^2}{(5-1)}}$$

$$S_g = 0,190$$

Percepatan gravitasi (g)

$$g = \bar{g} \pm S_{\bar{g}} = (9,768 \pm 0,190) m/s^2$$

Tabel. 1.3

N	xi	xi^2	t(s)	n	T	yi	xiyi	xi^2	y^	(yi-y^)^2	yi^2
5	0.35	0.123	11.42	10	1.142	1.304	0.456	0.123	1.254	0.003	1.701
	0.4	0.16	12.09	10	1.209	1.462	0.585	0.160	1.452	0.000	2.137
	0.45	0.203	12.53	10	1.253	1.570	0.707	0.203	1.650	0.006	2.465
	0.5	0.25	13.48	10	1.348	1.817	0.909	0.250	1.848	0.001	3.302
	0.59	0.348	15.02	10	1.502	2.256	1.331	0.348	2.205	0.003	5.090
jumlah	**2.29**	**1.083**			**6.454**	**8.408**	**3.987**	**1.0831**		**0.013**	**14.694**
rata-rata						**1.682**					

Slop Grafik

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5x(3,978) - (2,29)x(8,408)}{5x(1,083) - (2,29)^2} = 3,965$$

Intersep

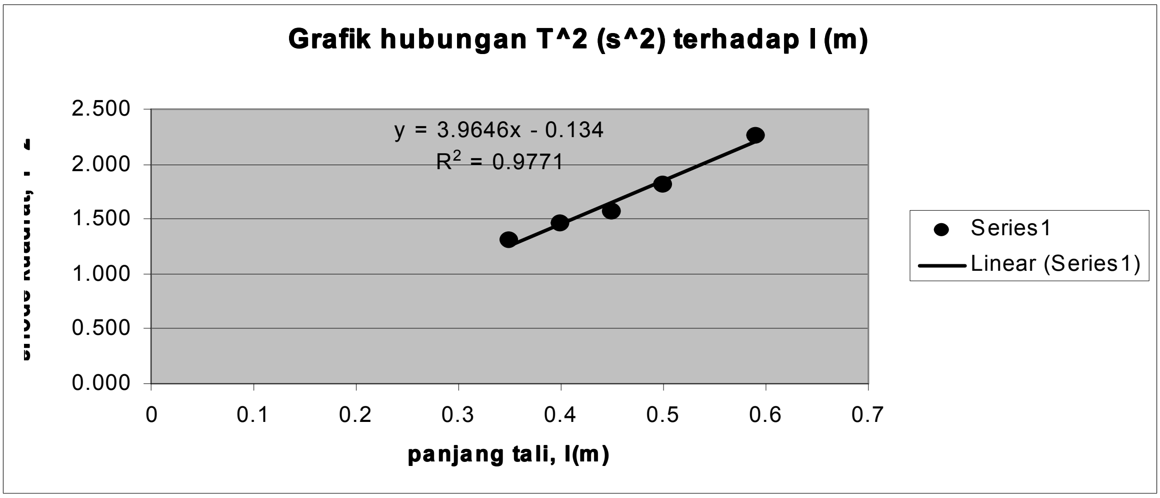
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{1,083x(8,408) - 3,987x(2,29)}{5x(1,083) - (2,29)^2} = -0,134$$

Nilai korelation

$$R=\frac{N\sum x_i y_i-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{\left[N\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2\right]\left[N\sum y_i^2-\left(\sum y_i\right)^2\right]}}$$

$$R=\frac{5x(3{,}978)-(2{,}29)x(8{,}408)}{\sqrt{\left[5x(1{,}083)-(2{,}29)^2\right]\left[5x(14{,}694)-(8{,}408)^2\right]}}=0{,}99$$

Maka nilai y = ax+b =3,965x-0,134



Perhitungan nilai ($S_{\hat{y}}$)

$$S_{\hat{y}}=\sqrt{\frac{\sum\left(y_i-\hat{y}\right)^2}{y-2}}=\sqrt{\frac{0{,}013}{5-2}}=0{,}065$$

Perhitungan nilai (S_a) :

$$S_a=S_{\hat{y}}\sqrt{\frac{N}{N\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}}=0{,}065\sqrt{\frac{5}{5(1{,}083)-(2{,}29)^2}}=0{,}350$$

Perhitungan nilai (S_g)

$$S_g=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a}S_a\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{4\pi^2}{a}\right)\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{a^2}S_a\right)^2}=\frac{8\pi^2}{(3{,}964)^2}(0{,}350)=0{,}880$$

Perhitungan gravitasi :

$$g=\frac{4\pi^2}{a}=\frac{4\pi^2}{3{,}964}=9{,}956$$

Maka nilai gravitasi adalah : $g=g\pm S_g=(9{,}956\pm 0{,}880)$ m/s²

Tabel. 1.4.1

xi	t(s)	n		T
0.7	17.12	10		1.712
	16.74	10		1.674
	16.77	10		1.677
	16.75	10		1.675
	16.73	10		1.673
rata-rata			T1	1.6822
				2.829797
			ST1	0.016724

Tabel. 1.4.2

xi	t(s)	n		T
0.6	16.5	10		1.65
	15.5	10		1.55
	15.47	10		1.547
	15.5	10		1.55
	15.53	10		1.553
rata-rata			T2	1.57
				2.4649
			ST2	0.044772

Tabel. 1.4.3

xi	t(s)	n		T
0.5	14.11	10		1.411
	14.13	10		1.413
	14.15	10		1.415
	14.09	10		1.409
	14.16	10		1.416
rata-rata			T3	1.4128
				1.996004
			ST3	0.002864

Tabel. 1.4.4

xi	t(s)	n		T
0.4	12.59	10		1.259
	12.69	10		1.269
	12.61	10		1.261
	12.61	10		1.261
	12.6	10		1.26
rata-rata			T4	1.262
				1.592644
			ST4	0.004

Tabel. 1.4.5

xi	t(s)	n		T
0.3	10.91	10		1.091
	10.88	10		1.088
	10.85	10		1.085
	10.93	10		1.093
	10.95	10		1.095
rata-rata			T5	1.0904
				1.188972
			ST5	0.003975

Tabel. 1.4.6

N	Ti	STi	xi	xi^2	yi	Sy	wi	wixiyi	wixi	wiyi	wixi^2	yi^2	wiyi^2
5	1.682	0.017	0.7	0.49	2.830	0.056	315.9	625.7	221.1	893.8	154.8	8.008	2529.3
	1.570	0.045	0.6	0.36	2.465	0.141	50.6	74.8	30.4	124.7	18.2	6.076	307.4
	1.413	0.003	0.5	0.25	1.996	0.008	15274.4	15243.9	7637.2	30487.8	3818.6	3.984	60853.8
	1.262	0.004	0.4	0.16	1.593	0.010	9810.7	6250.0	3924.3	15625.0	1569.7	2.537	24885.1
	1.090	0.004	0.3	0.09	1.189	0.009	13308.0	4746.8	3992.4	15822.8	1197.7	1.414	18812.9
Σ					**10.072**		**38759.6**	**26941.2**	**15805.3**	**62954.1**	**6759.0**		**107388.4**

Delta (Δ) = $\sum w_i \sum w_i x_i^2 - \left(\sum w_i x_i\right)^2 = (38759{,}5)(15805{,}3) - (15805{,}3)^2 = 12167760$

Slop grafik

$$a = \frac{\sum w_i \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - \left(\sum w_i x_i\right)^2}$$

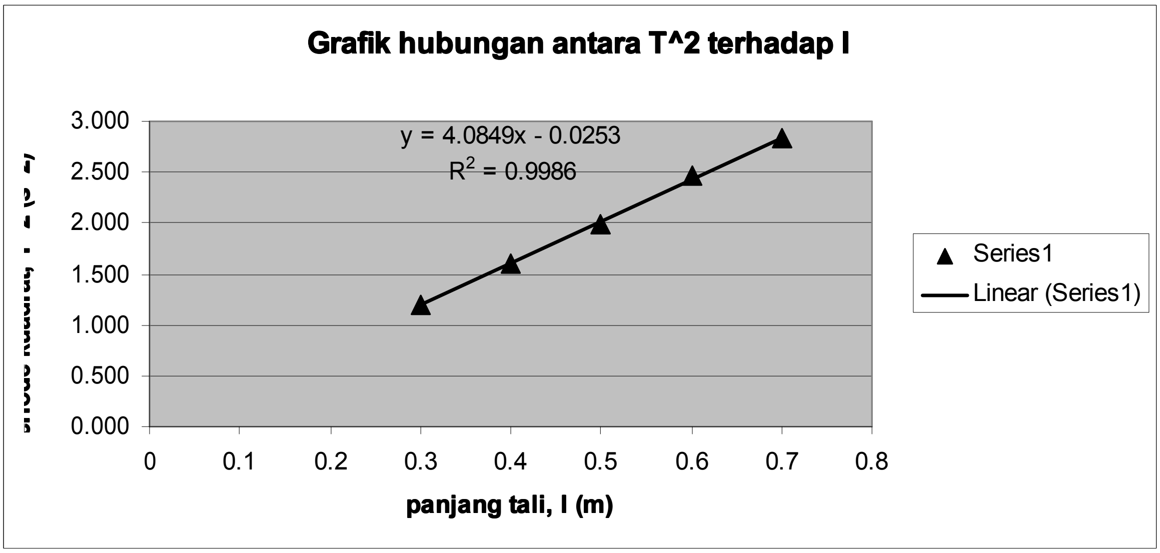
$$a = \frac{(38759{,}6)(26941{,}2) - 15805{,}3(62954{,}1)}{(38759{,}6)(6759{,}0) - (15805{,}3)^2} = 4{,}085$$

Intersep

$$b = \frac{\sum w_i x_i^2 \sum w_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\sum w_i \sum w_i x_i^2 - \left(\sum w_i x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{(6759{,}0)(62954{,}1) - 15805{,}3(26941{,}2)}{(38759{,}6)(6759{,}0) - (15805{,}3)^2} = 0{,}025$$

Maka garis lurus y = ax + b = 4,085x + 0,025



Nilai ralat

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum w_i} = \sqrt{\frac{38759{,}6}{12167760}} = 0{,}024$$

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\sum w_i x_i^2} = \sqrt{\frac{6759{,}0}{12167760}} = 0{,}056$$

$$S_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a} S_a\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{4\pi^2}{a}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{a^2} S_a\right)^2} = \frac{8\pi^2}{(4{,}085)^2}(0{,}024) = 0{,}057$$

Nilai gravitasi :

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{4{,}085} = 9{,}76$$

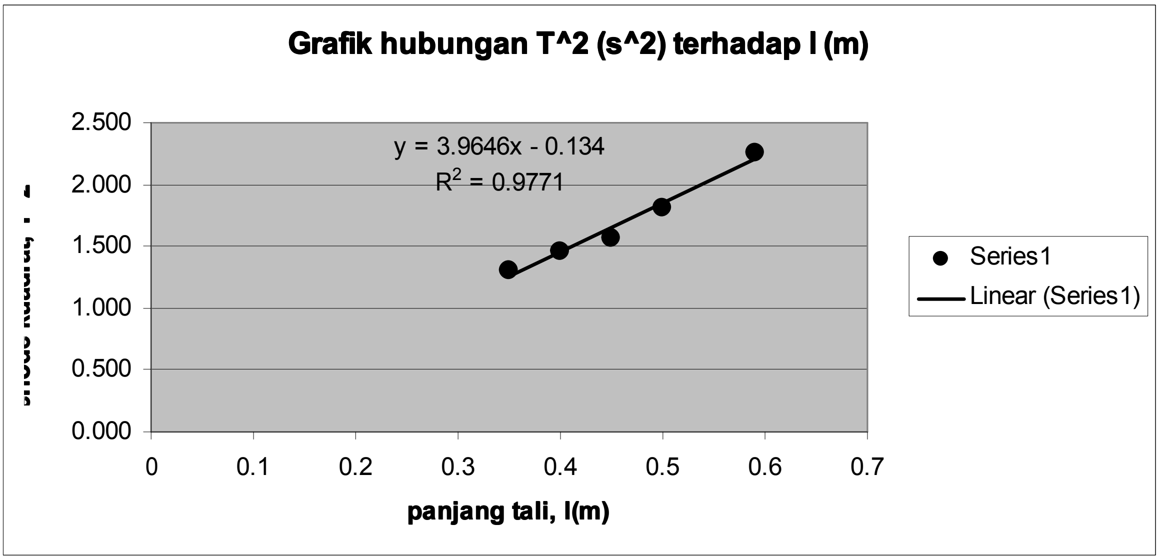
Maka gravitasi adalah :

$g = g \pm S_g = (9{,}76 \pm 0{,}057)\ \mathrm{m/s^2}$

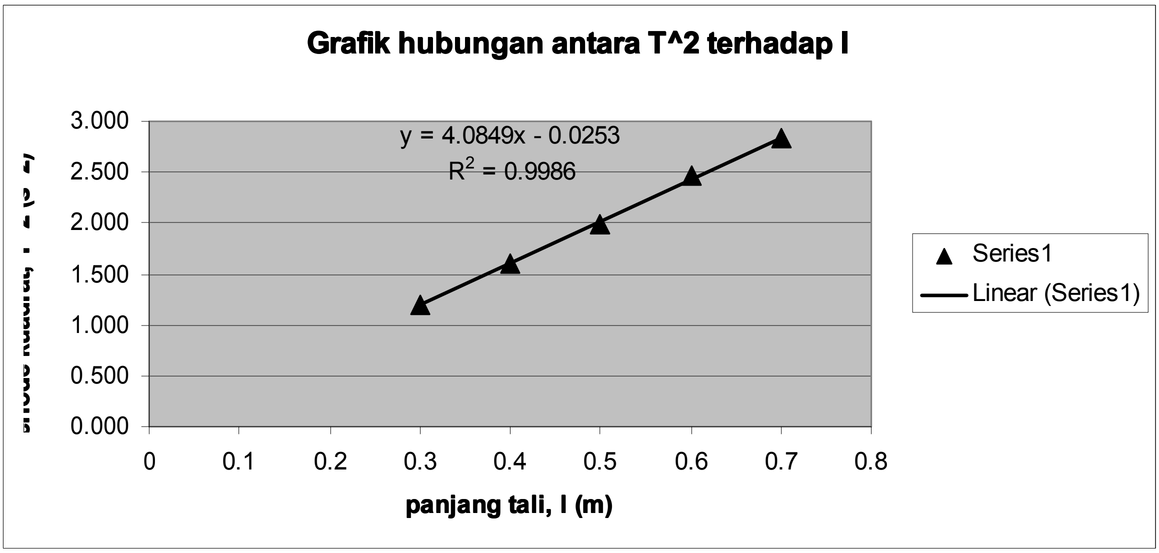
F. Pembahasan

Suatu metode pengukuran yang dilakukan untuk mengetahui gravitasi yang terjadi di tempat kita berada dapat dilakukan dengan menggunakan bandul yang biasa kita kenal dalam pembelajaran fisika adalah bandul matematis. Dari percobaan yang kami lakukan dilaboratorium Fisika Dasar Universitas Ahmad Dahlan yogyakarta dapat kita ketahui besar gravitasi di tempat tersebut yaitu dengan menggunakan metode regresi. Dari hasil percobaan didapatkan suatu nilai gravitasi yang berbeda-beda yang disebabkan oleh metode pengambilan data yang dilakukan dengan mengganti panjang tali dan tampa mengganti panjang tali tersebut. Selisih nilai gravitasi tidak jauh berbeda sehingga grafik yang diperoleh memiliki nilai korelasi yang sangat bagus sehingga didapatkan percobaan bandul matematis yang kita lakukan sudah cukup baik untuk membuktikan nilai gravitasi di laboratorium. Karena ralat yang diproleh dapat dikatakan cukup baik karena nilai ralat yang diproleh tidak terlalu besar.

Dari hasil pengamatan maka dapat diperoleh grafik untuk data yang menggunakan regresi linier berbobot maupun regresi linier tampa bobot seperti ditampilkan pada gambar di bawah ini!



Penentuan gravitasi melalui pengamatan yang dilakukan pada bandul matematis sangat berpengaruh terhadap ketelitian pengamat sehingga nilai ralatnya tidak terlalu jauh menyimpang dengan teori yang selama ini kita kenal. Sudut simpangan sangat berpengaruh terhadap ayunan yang kita lakukan sebab jika sudut simpangannya besar maka jumlah waktu ayunan yang diperoleh kecil sehingga gravitasi lebih kecil.



gravitasi yang diperoleh memiliki kecenderungan yang relatif sama atau mirip, sehingga grafitasi di laboratorium tersebut cenderung sama. Data yang diperoleh dapat dianalisis mengguakan metode regresi linier berbobot dan rekresi linier tampa bobot. Data yang diambil dilakukan pada panjang yang tetap dan panjang yang diubah-ubah sehingga dapat diperoleh keakuratan perhitungan yang diperoleh.

G. Kesimpulan

Dari data pengamatan maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Nilai gravitasi untuk pengamatan kenderung sama
2. Data yang diperoleh adalah :

- **Percepatan gravitasi (g)**

  $g = \bar{g} \pm S_{\bar{g}}$ = (9,99 ± 0,06) m/s^2

- **Percepatan gravitasi (g)**

  $g = \bar{g} \pm S_{\bar{g}} = (9{,}768 \pm 0{,}190) m/s^2$

- **Percepatan gravitasi (g)**

  $g = g \pm S_g = (9{,}956 \pm 0{,}880)$ m/s^2

- **Percepatan gravitasi (g)**

  g = g ± S_g = (9,76 ± 0,057) m/s^2

Daftar Pustaka

Anonim. 2003. *Bahan kuliah*. Yogyakarta : www. Bandul_Matematis.com

Anonim.2004. *Ayunan Sederhana*. Jakarta: Depdiknas

Anonim.2007.*Ensiklopedia Ilmu Pengetahuan Alam (Fisika).*Semarang:Aneka Ilmu.

Bevington dan Robinson.2003.Data *Reduction and Error Analysis for the physical Sciences*. McGrawHill

Hendra.2006.*Bandul Matematis.*Semarang: Aneka Ilmu.

Sutrisno.1997.Mekanika seri Fisika Dasar. Bandung : ITB.

Yahya. 2005.*Ayunan Matematis*. Solo. Seminar nasional